Produto Tensorial de Álgebras / R:

Def: $R_1, R_2 \equiv R$-álgebras com $\sigma: R \to R_1$
$\tau: R \to R_2$. Em

$$R' := R_1 \otimes_R R_2$$

temos $R' \otimes_R R' \xrightarrow{\mu} R'$ induzido

$$(r_1 \otimes r_2) \otimes (r_1' \otimes r_2') \overset{\mu}{\longmapsto} r_1 r_1' \otimes r_2 r_2'$$

que define um produto em R' que é um R-álgebra com $R \to R'$

$$r \mapsto \sigma(r) \otimes 1 = 1 \otimes \tau(r).$$

NB: R' tem 2 morfismos $R_1 \to R'$ e $R_2 \to R'$ dados por

$$\iota_{R_1}: R_1 \to R_1 \otimes R_2 \,;\, r_1 \mapsto r_1 \otimes 1$$
$$\iota_{R_2}: R_2 \to R_1 \otimes R_2 \,;\, r_2 \mapsto 1 \otimes r_2$$

Exemplo: $R[x] \otimes_R R[y] \simeq R[x,y]$

NB: Dar $R[x,y] \longrightarrow R''$ morfismo de R-álgebras $\iff$ dar $R[x] \longrightarrow R''$ e $R[y] \longrightarrow R''$

Prop: $R' = R_1 \otimes_R R_2 = R_1 \sqcup R_2$ em R-alg (coproduto em R-alg.).

Dem: Verificar que R' satisfaz a PU. $\square$

Exemplo: $R[\{x_\lambda\}_\lambda] \otimes_R R[\{y_\sigma\}_\sigma] \simeq R[\{x_\lambda, y_\sigma\}_{\lambda,\sigma}]$.

Exemplo: $k[[x]] \otimes_R k[[y]] \neq k[[x,y]]$

$k \equiv$ corpo. Temos

$$k[[x]] \otimes_R k[[y]] \longrightarrow k[[x,y]]$$

mas não é sobrejetivo, por exemplo

$$\sum_{i,j} x^i y^j \notin \text{imagem}$$

<u>Exercício</u>.

<u>O ideal diagonal</u> : $R' \equiv R$-álgebra

$$R' \otimes_R R' \supset \partial_{R'} := \ker \mu : R' \otimes_R R' \to R'$$

<u>Exemplo</u> : $R' = R[\{x_\lambda\}]$

$$R' \otimes_R R' = R[\{x_\lambda, y_\lambda\}]$$

Temos $x_\lambda - y_\lambda \in \partial_{R'}$

<u>Exercício</u>: $\partial_{R'} = \langle \{x_\lambda - y_\lambda\}_\lambda \rangle$

<u>Provar</u> : $R' \otimes_R R' / \langle \{x_\lambda - y_\lambda\}_\lambda \rangle \cong R'$

iso. induzido por μ.

Módulo Planos : $R \equiv$ anel $\quad R' \equiv R$-álgebra

Def: $F : R\text{-mod} \to R'\text{-mod}$ linear

diz-se que F é

1. exato, se preserva suc. exatas
2. exato à esquerda, se preserva ker's
3. exato à direita, se preserva coker's
4. fiel, se $F : \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_{R'}(FM,FN)$

   é injetivo.

Exemplos 1. Dado S conjunto, $FM := M^{\oplus S}$

é um funcetor exato.

2. Dado $N \in R\text{-mod}$, $FM := \mathrm{Hom}_R(N,M)$

é à esquerda exato: $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$

$\Rightarrow \quad 0 \to \mathrm{Hom}_R(N,M') \to \mathrm{Hom}_R(N,M) \to \mathrm{Hom}_R(N,M'')$

3. Se $N \in R$-mod

é projetivo

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\beta"] \\ N \arrow[ur, dashed, "\exists h ?"] \arrow[r] & M'' \end{tikzcd}$$

em $FM := \mathrm{Hom}_R(N, M)$ é exato.

4. Dado $N \in R$-mod, $FM := M \otimes_R N$

é exato à direita:

$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ exata

$$\Longrightarrow \quad M' \otimes_R N \xrightarrow{\alpha \otimes 1_N} M \otimes_R N \xrightarrow{\beta \otimes 1_N} M'' \otimes_R N \to 0$$

é exata.

NB: 1. uma sucessão $\to M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}}$

é exata sse

$$0 \to \operatorname{coker} f_{i-1} \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \operatorname{Im} f_{i+1} \to 0$$

é exata $\forall i$

2. $$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$$

é exata $\iff$ $M' \equiv \ker \beta$

__NB__: Se $F : R\text{-mod} \to R'\text{-mod}$ é funtor linear __contravariante__, F é exato à esquerda se

$$M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

exata $\Rightarrow$

$$0 \to FM'' \xrightarrow{F\beta} FM \xrightarrow{F\alpha} FM'$$

é exata.

__Exemplo__: $FM := \operatorname{Hom}_R(M,N)$ com $N \in R\text{-mod}$ fixo.

<u>Proposição</u>: Seja $F: R\text{-mod} \to R'\text{-mod}$ linear

ASASE:

1. F exato
2. F preserva suc. exatas curtas.
3. F preserva ker's e epimorfismos
4. F preserva coker's e monomorfismos
5. F preserva ker's e imagens.

<u>Dem</u> A suc.

$$0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$$

é exata sse

i. $\alpha : M' \to M$ é $\ker\beta$ e β é epimor.

ii. α é mono. e $\beta : M \to M'' = \operatorname{coker}\alpha$.

Por outro lado, $M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M''$ é exata $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Im}\alpha = \ker\beta$

Se F preserva ker's e imagem, então

$$F\,\mathrm{Im}\,\alpha = \mathrm{Im}\,F\alpha \quad e \quad F\ker\beta = \ker F\beta$$

logo $\mathrm{Im}\,\alpha = \ker\beta \Rightarrow \mathrm{Im}\,F\alpha = \ker F\beta$

Reciprocamente dado $\alpha : M \to N$, podemos construir 2 suc. exactas seguintes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker\alpha \arrow[r] & M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "p"'] & N \arrow[r, "\kappa"] & \mathrm{coker}\,\alpha \arrow[r] & 0 \\
& 0 \arrow[rr] & & \mathrm{Im}\,\alpha \arrow[u, "j"'] \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

Se F é exato $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F\ker\alpha \arrow[r] & FM \arrow[r, "F\alpha"] \arrow[dr, "Fp"'] & FN \arrow[r, "F\kappa"] & F\mathrm{coker}\,\alpha \arrow[r] & 0 \\
& 0 \arrow[rr] & & F\mathrm{Im}\,\alpha \arrow[u, "Fj"'] \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

é um diagrama comutativo com 2 suc. exata

$\Rightarrow$ exer.
$$F \operatorname{Ker} \alpha = \operatorname{Ker} F\alpha$$
$$F \operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} F\alpha$$

$\square$

<u>Def</u>: Um R-módulo M diz-se <u>plano</u> se o funtor $M \otimes_R \cdot$ é exato. Se $M \otimes_R \cdot$ é também fiel, diz-se que M é <u>fielmente plano</u>.

<u>Exemplo</u>: Se M é livre, então M é fielmente, então M é fielmente plano.

<u>Lema</u>: $M = \bigoplus_\lambda M_\lambda$ é plano sse M_λ é plano $\forall \lambda$. Mais M é fielmente plano se M_λ é plano $\forall \lambda$ e se $\exists \lambda'$ t.q. $M_{\lambda'}$ é fielmente plano.

Dem: $M \otimes_R N = \bigoplus_\lambda M_\lambda \otimes N$ $\square$

Exemplo: $P \in R\text{-mod}$ projetivo $\Longrightarrow$ P plano. (P proj. $\Leftrightarrow$ P somando direto de módulo livre.

$(1,0)\cdot(0,1) = (0,0)$

Exemplo: Se $R = R_1 \times R_2$ $\Longrightarrow$ R_1, R_2 são planos mas não são fielmente planos:

$$R_1 \otimes_R R_2 = R_2 \otimes_R R_1 = 0$$

Prop: Seja $0 \to M' \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} M'' \to 0$ exata e M'' plano. Então

(1) $\forall N \in R\text{-mod}$ $\quad 0 \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N \to 0$

é exata

(2) M é plano sse M' é plano

Dem: (1) Consideramos suc. exata

$$0 \to K \xrightarrow{i} R^{\oplus \Lambda} \xrightarrow{p} N \to 0$$

$$\begin{tikzcd}
 & \ker 1_{M'} \otimes i \arrow[r] \arrow[d] & \ker 1_M \otimes i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & M' \otimes K \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes K \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes K \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M' \otimes R^{\oplus \Lambda} \arrow[r, "\alpha \otimes 1"] \arrow[d] & M \otimes R^{\oplus \Lambda} \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes R^{\oplus \Lambda} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & M' \otimes N \arrow[r, "\alpha \otimes 1_N"] \arrow[d] & M \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & M'' \otimes N & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

$\therefore$ $\alpha \otimes 1_N$ é 1-1

(2) Consideremos $0 \to K \xrightarrow{f} N$ suc. exata. Obtemos

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \ker(1_{M'}\otimes f) \arrow[r] \arrow[d] & \ker(1_M\otimes f) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] & M'\otimes K \arrow[r] \arrow[d, "1_{M'}\otimes f"] & M\otimes K \arrow[r] \arrow[d, "1_M\otimes f"] & M''\otimes K \arrow[r] \arrow[d, "1_{M''}\otimes f"] & 0 \\
 & 0 \arrow[r] & M'\otimes N \arrow[r] & M\otimes N \arrow[r] & M''\otimes N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

lema de Snake $\ker(1_{M'}\otimes f) = \ker(1_M\otimes f)$

$\therefore$ M é plano sse M' é plano. $\square$

<u>Proposição</u>: Um limite direto filtrado de módulos planos é plano: $M = \varinjlim_{\Lambda} M_\lambda$

<u>Dem</u>: limites diretos filtrados de suc. exatas são exatas.

Prop: Se N é um (R,R')-bimódulo e $P \in R'$-mod. Dado $M \in R$-mod $\exists$ morfismo natural

$$\Theta : \mathrm{Hom}_R(M,N) \otimes_{R'} P \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, N \otimes_{R'} P)$$

Se P é plano, então

$$M \text{ f.g.} \Longrightarrow \Theta \ 1\text{-}1.$$
$$M \text{ f.a.} \Longrightarrow \Theta \ \text{iso}.$$

Dem: $\Theta(\varphi \otimes p\,(m)) := \varphi(m) \otimes p$

Caso $M = R$: $\mathrm{Hom}_R(R,N) \otimes_{R'} P \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R, N \otimes_{R'} P)$

$$\underset{\text{iso}}{\wr} \quad N \otimes_{R'} P \quad = \quad N \otimes_{R'} P \quad \wr$$

Caso $M = R^n$: $\mathrm{Hom}_R(R^n, N) = (\mathrm{Hom}_R(R,N))^n$

iso

M f.a. $\exists\ R^m \to R^n \to M \to 0$ exata

$\Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(R^n, N) \to \mathrm{Hom}_R(R^m, N)$

exata

$\Rightarrow$
P plano

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes P & \to & \mathrm{Hom}_R(R^n,N)\otimes P & \to & \mathrm{Hom}_R(R^m,N)\otimes P \\
& \theta_M \downarrow & & \theta_{R^n} \downarrow \wr & & \theta_{R^m} \downarrow \wr \\
0 \to & \mathrm{Hom}(M, N\otimes_R P) & \to & \mathrm{Hom}_R(R^n, N\otimes P) & \to & \mathrm{Hom}_R(R^m, N\otimes P)
\end{array}$$

$\Rightarrow \theta_M$ é iso.

Caso M f.g. análogo.

$\square$

Def.: Seja $M \in R\text{-mod}$. Definimos Λ_M como a cat. dos $\alpha : R^n \to M$ (obj. são pares (R^n, α)) e dos morfismos:

$$\begin{tikzcd} R^n \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\alpha"'] & R^{n'} \arrow[d, "\alpha'"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & M \end{tikzcd}$$

i.e. morfismo $\varphi : (R^n, \alpha) \to (R^{n'}, \alpha')$ é $\varphi : R^n \to R^{n'}$ t.q. $\alpha = \alpha' \varphi$

NB: Seja $F : \Lambda_M \to R\text{-mod}$ o functor de esquecimento: $F(R^n, \alpha) := R^n$

Podemos ~~podemos~~ formar

$$\varinjlim_{\Lambda_M} F$$

<u>Prop</u>: $\lim_{\Delta \to M} F = M$